

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Algebra</b>	<b>7</b>
2.1	Summenformeln . . . . .	7
2.1.1	Quadratsummen . . . . .	7
2.1.2	Kubensummen . . . . .	8
2.1.3	Nochmals Quadratsummen (oder Kubensummen?) . . . . .	9
2.1.4	Erneut Quadratsummen - ein weiterer Versuch . . . . .	11
2.1.5	Kubensummen (nochmals) mittels Quadratsummen . . . . .	12
2.1.6	Biquadratsummmen . . . . .	14
2.1.7	Aufgaben . . . . .	15
2.1.8	Ein Exkurs in die Analysis: Negative Exponenten . . . . .	15
2.2	$\mathbb{H}$ : Die Quaternionen . . . . .	23
2.2.1	Genese von $\mathbb{H}$ . . . . .	23
2.2.2	Die Gleichung $X^2 = -1$ in $\mathbb{H}$ . . . . .	26
2.2.3	Drehungen im $\mathbb{R}^3$ mittels vektorieller Quaternionen . . . . .	28
2.2.4	Konstruktion der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ via $\mathbb{H}$ [ $\mathfrak{S}(\mathbb{H})$ ] . . . . .	30
2.2.5	Anwendung von $\mathbb{H}$ in der Vektoralgebra . . . . .	35
2.2.6	Parallelen zu bzw. Erweiterungen gegenüber $\mathbb{C}$ . . . . .	38
2.2.7	Ausblick . . . . .	42
2.3	Schmankerln aus der Linearen Algebra: Matrizen und lineare Abbildungen . . . . .	44
2.3.1	Spuren, Determinanten, Satz von CAYLEY-HAMILTON . . . . .	44
2.3.2	Matrizeninversion . . . . .	45
2.3.3	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	47
2.3.4	Doppelt-stochastische Matrizen . . . . .	62
2.3.5	Geometrische Bedeutung der Determinante von Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ . . . . .	64
2.4	Algebraische Gleichungen unter der Lupe . . . . .	70
2.4.1	Quadratische Gleichungen . . . . .	70
2.4.2	Diskriminanten . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Geometrie</b>	<b>102</b>
3.1	Mathematik und Fußball . . . . .	102
3.2	Der Satz von MORLEY . . . . .	104
3.3	Nachtrag zum skalaren Produkt und zur Determinante . . . . .	106
3.4	Nachtrag zum vektoriellen Produkt . . . . .	113
3.5	Regelflächen . . . . .	114
3.6	Kreis . . . . .	117
3.6.1	Kreisgleichungen . . . . .	117
3.6.2	Kreistangenten . . . . .	121
3.6.3	Polarentheorie beim Kreis . . . . .	122
3.6.4	Schnitt zweier Kreise . . . . .	127
3.6.5	Inversion am Kreis . . . . .	131
3.6.6	Ergänzung zum Kreis . . . . .	147
3.7	Die Ellipse als affines Kreisbild . . . . .	149
3.7.1	Die Konstruktion von LA HIRE . . . . .	149

3.7.2	Orthogonale Stauchungen und Streckungen (OS)	150
3.7.3	Ellipsentangenten und -polaren via OS	151
3.7.4	Die Ellipse in allgemeiner Lage	153
3.7.5	Ergänzung zur Ellipse	155
3.7.6	Eine kinematische Erzeugung der Hyperbel aus der Ellipse	158
3.8	Eine kurze Bemerkung zum Sinussatz ...	162
3.9	... sowie zum ersten Summensatz des (Co-)Sinus	163
3.10	Dreiecksgeometrie	164
3.10.1	Dreiecksschwerpunkt und Differenzgleichungen	164
3.10.2	FEUERBACH-Kreis und Bierdeckelsatz	172
3.10.3	Ein äußerst merkwürdiger Punkt	179
3.10.4	Zwei merkwürdige Punkte	181
3.11	Ergänzung zur HESSEschen Abstandsformel	183
<b>4</b>	<b>Analysis</b>	<b>189</b>
4.1	Die Sektorformel für Kurven in Parameterdarstellung	189
4.2	Die DESCARTESSche Kreismethode	193
4.2.1	Ableitung von Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten mittels DESCARTESScher Kreismethode	193
4.2.2	Äquivalenz der DESCARTESSchen Kreismethode und des klassischen Differentialquotienten	194
4.2.3	Eine Anwendung der DESCARTESSchen Kreismethode	195
4.3	Rektifikation von Kurvenbögen	196
4.4	Krümmung(skreise) ebener Kurven und Evoluten	199
4.5	KEPLERS Fassregel als Schmankerl zur numerischen Integration	213
4.6	Zur EULERSchen Formel	219
4.7	Zur Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion	224
4.8	(Wie die EULERSche Zahl in die) Hyperbelfunktionen (kommt)	225
4.9	Kurvenscharen und Enveloppen	235
4.9.1	Differentialgeometrische Grundlagen (Enveloppensatz)	235
4.9.2	Erste Anwendung: Die Astroide	236
4.9.3	Zweite Anwendung: Die Kardioide	246
4.9.4	Dritte Anwendung: Scharen von Graphen von Polynomfunktionen	252
4.9.5	Vierte Anwendung: Scharen von Graphen rationaler Funktionen (inkl. Ortskurven)	254
4.9.6	Anhang zum Enveloppensatz: Parameterdarstellung von Einhüllenden	261
4.9.7	Parallelkurven - Die Toroiden	284
4.10	Das Katenoid - eine merkwürdige Volumensformel	289
4.11	Ungewöhnliche Volumensformeln	290