

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Schöne und/oder wichtige Sätze der Geometrie	9
2.1	Das skalare Produkt zweier Vektoren	9
2.1.1	Ein Zugang über den Flächeninhalt rechtwinkliger Dreiecke	9
2.1.2	Ein geometrischer Zugang auf Grundlage der Trigonometrie	11
2.1.3	Grundlagen und entsprechende Situation im \mathbb{R}^3	13
2.1.4	Ein Zugang über Rechtecke	14
2.1.5	Ein abbildungsgeometrischer Zugang	15
2.1.6	Ein (elementar)geometrischer Zugang	16
2.1.7	Ein Weg über den Höhensatz	19
2.1.8	... und noch ein abbildungsgeometrischer Zugang	19
2.1.9	Ein anderer geometrischer Zugang	20
2.1.10	Vom \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^3 durch eine Drehung	21
2.1.11	Ein Zugang über den Cosinussatz	25
2.1.12	Zum Abschluss: Ein Zugang über Optimierung	26
2.2	Das Vektorielle Produkt zweier Vektoren	28
2.2.1	Ein Zugang über die darstellende Geometrie	28
2.2.2	Ein zweiter Zugang über die darstellende Geometrie	32
2.2.3	Ein dritter Zugang über Parameterelimination	35
2.2.4	Ein vierter Zugang über den Schnitt zweier Ebenen	36
2.2.5	Ein fünfter Zugang, nochmals über den Schnitt zweier Ebenen	38
2.2.6	Ein sechster Zugang, erneut über den Schnitt zweier Ebenen	39
2.2.7	Ein siebenter Zugang über Normalprojektionen	39
2.2.8	Ein achter Zugang, wieder über Normalprojektionen	40
2.2.9	Ein neunter Zugang via <i>innerer Geometrie</i>	41
2.2.10	Ein zehnter Zugang via HERONScher Flächeninhaltsformel	42
2.2.11	Ein klassischer Zugang in neuem Gewande	43
2.2.12	Ebenso durch eine Drehung vom \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^3	44
2.3	Perspektive Affinitäten	45
2.3.1	Eine räumliche Motivation	45
2.3.2	Perspektive Affinitäten	48
2.3.3	Anhang 1 zu den perspektiven Affinitäten	52
2.3.4	Anhang 2 zu den perspektiven Affinitäten: Invariante Orthogonalitäten	56
2.4	Die GAUSS-Gerade	58
2.5	Der Fundamentalsatz der Axonometrie von GAUSS	59
2.6	Konjugierte Ellipsendurchmesser/Krümmungskreisconstruction	65
2.7	Konjugierte Durchmesser und RYTZsche Achsenkonstruktion	68
2.8	Normale Axonometrie	71
2.9	Projektive Geometrie und elementare Algebra, Teil 1	74
2.10	Projektive Geometrie und elementare Algebra, Teil 2	77
2.11	Zentralprojektion und analytische Raumgeometrie	81
2.12	Spezielle lineare Abbildungen	84

2.12.1	Normalprojektionen auf Geraden und Ebenen durch den Koordinatenursprung	84
2.12.2	Spiegelungen an Geraden und Ebenen durch den Koordinatenursprung	85
2.12.3	Orthogonale Drehungen um Geraden durch den Koordinatenursprung	86
2.12.4	Konstruktion der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ aus A_1 und A_5	88
2.12.5	Paralldrehen: eine weitere lineare Abbildung von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^3 . . .	94
2.13	BROCARDsche Punktepaare	99
2.14	Volumina und das Spatprodukt	104
2.15	Das vektorielle Tripelvektorprodukt und der GRASSMANNsche Entwicklungssatz	106
2.16	Winkel zwischen zwei Ebenen	109
2.17	Der Flächenprojektionssatz	113
2.18	Raumfüllende Dodekaeder?	115
2.19	GRAMsche Matrizen an unerwarteter Stelle	119
2.20	GRAM-SCHMIDTches Orthonormierungsverfahren und vektorielles Produkt	121
2.21	Der Satz von DESARGUES	128
2.22	STS: Der Sehnen-Tangenten-Satz	131
2.23	Drei neue Beweise des Satzes von PYTHAGORAS	133
2.24	Der Peripheriewinkelsatz	137
3	Miscellanea und Selecta	140
3.1	Zur Auflösung kubischer Gleichungen	140
3.2	Zur Auflösung biquadratischer Gleichungen	143
3.2.1	Zugang 1	143
3.2.2	Zugang 2	145
3.3	Wege zur kleinen Lösungsformel	149
3.3.1	Wo ist das doppelte Produkt?	149
3.3.2	Her und gleich wieder weg mit dem $z!$	150
3.3.3	Ein additiver Ansatz	150
3.3.4	Quadratergänzung einmal anders	152
3.3.5	Trigonometrische Hilfe	152
3.3.6	Lösung über den Kreis	153
3.4	Numerisches Lösen von Differentialgleichungen	155
3.5	Exaktes Lösen spezieller Differentialgleichungen	159
3.5.1	Lineare Differentialgleichungen: Die Potenzreihenmethode	159
3.5.2	Lineare Differentialgleichungen: Lösen mittels Verwendung von Differentialen und Substitutionen	162
3.6	Probabilistische Modelle in der Kognitiven Psychologie	165
3.7	Beweise der EULERSchen Formel	168
3.7.1	Ein funktionentheoretischer Beweis	168
3.7.2	Der Weg über die (Arcus-)Cosinusfunktion	171
3.7.3	Der Weg über die (Arcus-)Sinusfunktion	171
3.7.4	Ein Weg über die komplexe Faktorisierung der Eins	172
3.8	Sinus und Cosinus als Reihen	173
3.9	Summenformeln	178

3.10	Achtung vor Verallgemeinerungen!	179
3.11	Vereinfachungen beim nichtlinearen Optimieren	184
4	Kegelschnitte	186
4.1	Ein einfacher Zugang zur Ellipse	186
4.2	Eine kinematische Ellipsenkonstruktion	187
4.3	... sowie eine sich daraus ergebende allgemeinere Konsequenz	189
4.4	Eine kinematische Parabelkonstruktion	191
4.5	... sowie eine sich daraus ergebende allgemeinere Konsequenz	192
4.6	Eine Tangentenkonstruktion für die Ellipse	194
4.7	Eine weitere Tangentenkonstruktion für die Ellipse	195
4.8	Der Satz von PASCAL für die Hyperbel	195
4.9	Der Satz von PASCAL für die Parabel	198
4.10	Der Satz von PASCAL und Parabeltangenten	201
4.11	Kegelschnitte in allgemeiner Lage	203
4.12	Weitere Beweise des Klassifikationsatzes	207
4.12.1	Eine Klassifikation unter Verwendung von Polarkoordinaten	208
4.12.2	Eine Klassifikation unter Verwendung eines Grenzwerts	209
4.12.3	Eine Variation vom vorherigen Beweis	209
4.12.4	Eine zweite Variation vom vorletzten Beweis	210
4.13	Eine Reflexionseigenschaft der Ellipsentangente	212
4.14	Plückers μ	213
4.14.1	Kegelschnitte durch fünf Punkte	213
4.14.2	Plückers μ für die Parabel	218
4.14.3	Plückers μ für die gleichseitige Hyperbel	219
4.14.4	Plückers μ für die gleichseitige Ellipse	221
4.15	Kegelschnitte & Architektur / Exkurs Abbildungsgeometrie	223
4.15.1	Perspektive Kollineationen	224
4.15.2	Die direkte Achsenkonstruktion	236
4.15.3	Anwendung der direkten Achsenkonstruktion auf ein Drei-/Sechseck	239
4.15.4	Perspektiv-kollineare Kreisbilder: Ellipse, Hyperbel und Parabel	246
4.15.5	Perspektive Kollineationen und das Doppelverhältnis	252
4.15.6	Harmonische Punktequadrupel bei zwei Kreisen mit gemeinsamen Tangenten	254
4.15.7	Tangententreue perspektiver Kollineationen	255
4.16	Die projektive Verwandtschaft zwischen Ellipse und Parabel	256
4.17	Der Satz von IVORY	259
4.18	Die Drei-Punkte-Formel	261
5	Ergänzungen	264
5.1	Astronomie und quadratische Gleichungen	264
5.2	Ein Entartungssatz	265
5.3	Kegelschnitte als projektive Bilder eines Kreises	268
5.4	Zehn weitere Beweise des Klassifikationsatzes	270
5.4.1	Ein weiterer Zugang über Asymptoten	270
5.4.2	Ein Zugang über die HESSESche Abstandsformel	272
5.4.3	Ein symmetrischer Zugang	273

5.4.4	Ein weiterer symmetrischer Zugang	275
5.4.5	Ein Zugang über die Analysis	275
5.4.6	Ein abbildungsgeometrischer Zugang	277
5.4.7	Ein Zugang über eine verallgemeinerte Berührungsbedingung	278
5.4.8	Ein Zugang über Drehungen und Hauptlagengleichungen	281
5.4.9	Ein Zugang über Koordinatentransformationen	283
5.4.10	Ein Zugang über orientierte Normalabstände	285
5.5	(Weitere) Elemente der Raumgeometrie	287
5.5.1	Würfel, Kegel und Parabel	287
5.5.2	Würfel, Kegel und Hyperbel	291
5.5.3	Würfel, Kegel und Ellipse	295
5.6	Vektoriell Produkt, Spatprodukt und Koordinatenwechsel	298
5.7	Quadratwurzeln von Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$	302
5.8	Harmonische Punkte im vollständigen Vierseit	306