

## Der erste Denkkzettel

*Alle ihre Werke aber tun sie,  
daß sie von den Leuten gesehen werden.  
Sie machen ihre Denkkzettel breit,  
und die Säume an ihren Kleidern groß.*

Matthäus 23, 5

Dem Leser und der Leserin schulde ich hier vorab drei einleuchtende Erklärungen zu den Begriffen ›Denkkzettel‹, ›Paramathematik‹ und ›enttäuschte Erkenntnis‹. Ich gebe sie in dieser Reihenfolge.

Oberflächlich betrachtet ist ein Denkkzettel (im Latein des Mittelalters *cedula* genannt) ein kleines Stück Papier, auf dem Dinge notiert werden, die man sich merken möchte oder sollte – wenigstens für eine Weile. Ursprünglich war der »Denkkzedel« – wie Luther die Stelle im Matthäus-Evangelium übersetzte – ein Riemen mit Gesetzessprüchen, und es waren die Pharisäer, die ihn in der Weise öffentlich zur Schau trugen. Dafür verpasste ihnen Jesus einen Denkkzettel nach heutigem (jesuitisch geprägtem) Verständnis: der erste – zumindest in christlicher Überlieferung – und zugleich vielleicht bedeutendste seiner Art. »Denkkzedel« – Gebetsriemen

Im frühen Denkkzettel schwingt die Vorstellung eines parteiischen Gottes mit, der penibel Buch führt über ihm genehme fromme Eiferer, aber auch über den Rest der Unfrommen, denen nichts Gutes verheißen wird für den Tag der Abrechnung und danach. Auch spätere Varianten nehmen dem

Zettel nichts von seinem Drohcharakter. Im Gegenteil, die mittelalterliche »cedula« etwa war ebenfalls eine Vorladung vor Gericht. In den Händen der Jesuiten wurde sie schließlich zu einem ›Erziehungswerkzeug‹ in Gestalt einer Liste, in die man die Verfehlungen und schlechten Neigungen eines Schülers eintrug. Der arme Tropf hatte den Zettel bei sich zu tragen und jederzeit damit zu rechnen, dass ihm das daraus resultierende Maß körperlicher Züchtigung zuteil wurde.

*Denkzettel  
– ein altes und  
streitbares Genre*

Die Tradition der Denkzettel wird, in geistig verfeinerter Form und gleichsam als literarisches Genre, bis auf den heutigen Tag weitergepflegt. Nicht wenige Werke dieser Gattung führen den dräuenden »Zedel« in ihren Haupttiteln: etwa Trotzki so unertitelte »Politische Erfahrungen im Zeitalter der permanenten Revolution« oder Günter Grass' »Politische Reden und Aufsätze 1965-1976« oder ein von Karlheinz Deschner verfasster »Kleiner Denkzettel zum ›Großen Bußakt‹« des Papstes im Heiligen Jahr 2000, und dgl. mehr.

*Die tun nix?*

Bei den im Folgenden eher ausgebreiteten als ausgeteilten Denkzetteln handelt es sich, der Bedeutung von ›Zettel‹ folgend, durchweg um kurzgefasste Betrachtungen zu einem denk- und manchmal auch fragwürdigen Thema aus dem weiten Umfeld der Mathematik. Vor allem sollen diese Betrachtungen auf unterhaltsame Weise kritisches Nachdenken anregen. Hundebesitzer geben verängstigten Personen, für die sich ihr Vierbeiner interessiert, gerne lächelnd die Floskel ›Der tut nix!‹ zur Entwarnung. Das hier zu versuchen, wäre freilich etwas untertrieben, weil kritisches Nachdenken meist eben doch leichter durch einen mehr oder weniger herausfordernden Anreiz in Gang kommt. Der Untertitel des Buchs soll andeuten, was mir dabei vorschwebte.

*Paramathematik  
– wie bitte?*

Von vornherein ist hier einzuräumen, dass das Beiwort ›paramathematisch‹ und mehr noch das zugehörige Hauptwort dazu geeignet ist, beträchtliches Stirnrunzeln hervorzurufen. Bevor ich näher darauf eingehe, sei daran erinnert, welch seltsame Präfixe sich die Physik in ihrer Geschichte schon hat gefallen lassen. So begann die Metaphysik des Aristoteles als Bündel seiner allgemein-philosophischen Schriften,

die man im Regal zunächst hinter (= gr. *metà*) die *Physik* gestellt hatte, um dann nach Jahrhunderten als »ein Hinüberfliegen in eine ganz andere Welt« (J. Hirschberger) zu enden. Eine Protophysik, mit der Paul Lorenzen der Physik einmal rational-methodisch gesicherte Grundlagen verschaffen wollte, ist über ihren Namen nicht weit hinausgekommen. Und eine 'Pataphysik schließlich, vom bizarren Bohémien Alfred Jarry als »Wissenschaft der imaginären Lösungen« ausgeheckt<sup>1</sup>, bietet sich umgekehrt für einen ungeordneten Ausstieg aus jeglicher Rationalität an, indem sie die Grenze zwischen Sinn und Unsinn ironisch-mutwillig ignoriert.

»Nur die  
'Pataphysik  
unternimmt  
nichts, um die  
Welt zu retten.«  
Collège de  
'Pataphysique

Anerkennung, von einem einigermaßen haltbaren Standpunkt aus, haben diese Kinder des Ungenügens an vorgefundener Erkenntnis allesamt nicht finden können oder wollen.

Und die Mathematik? Anders als Metaphysik ist Metamathematik eine späte Erscheinung. Sie entstand aus Hilberts programmatischem Vorhaben, die Widerspruchsfreiheit der formalisierten Arithmetik (und letztlich der gesamten Mathematik) mit mathematischen Mitteln zu beweisen. Die dazu entwickelte metamathematische Beweistheorie war von Anfang an folgerichtig selbst Teil *der Mathematik* und nicht etwa – wie der Name zu sagen scheint – eines außermathematischen, womöglich philosophischen Diskurses *über* Mathematik, den sie (wie es in der Absicht Hilberts lag) sogar überflüssig machen und von der eigentlichen Mathematik fernhalten sollte.

Metamathematik  
ist Mathematik

Was könnte nun näherliegen, als einen aus der Mathematik hinausgedrängten Diskurs, eine ins Nebefeld geschobene Rede über Mathematik (einschließlich der Rede über solche Rede) unter den Sammelbegriff Paramathematik zu fassen, entspricht dies doch dem Sinn des griechischen *pará* (= neben) recht genau. Bedauerlicherweise fällt aber auf die Bezeichnung der lange zweifelhafte Schatten jener paranormalen Erscheinungen, welche die Parapsychologie zu untersuchen vorgibt, – auch wenn das eine mit dem anderen nicht das Geringste zu tun hat (und uns z. B. beim Umgang mit Parallelen und Paradoxien solche Skrupel fremd sind). Zu-

»Prosa, die den  
Kalkül begleitet«  
L. Wittgenstein

dem bestätigt sich der Verdacht, am Übersinnlichen interessierte Doktrinen könnten den Begriff bereits in Beschlag genommen haben.<sup>2</sup>

*Ein neuer Zweig  
der Mathematik?*

Ungeachtet solcher Bedenken hat der Schriftsteller Apostolos Doxiadis einen neuen Zweig der Mathematik ausgerufen<sup>3</sup>: »I believe that a new branch of mathematics ... is being born. A new branch of which we have desperate need. I call it *paramathematics*.« – Doxiadis stellt sich darunter vor: Mathematikgeschichte und Biografik, von einer erkenntnistheoretischen Warte aus betrieben und mit den Mitteln der Rhetorik und der literarischen Erzählkunst dargeboten. – Es ist wohl möglich, die Mathematik durch derlei Kontexte vorteilhaft anzureichern. Aber sind nicht Mathematikgeschichte und Epistemologie schon Disziplinen eigenen Rechts, aus denen eine Paramathematik allenfalls Anregungen und Materialien schöpfen kann? Zudem sind mathematische Beweise und Problemlösungen für Doxiadis so etwas wie Muster von Erzählungen, die er seinem paramathematischen Diskurs generell als *narratives Gerüst* auferlegen will.

*Den Rahmen  
erweitern*

Einengungen wie diese wollen mir nicht einleuchten. Wenn schon Paramathematik, dann doch lieber in einem weiter gespannten und beweglichen Rahmen. Braucht denn ein Unternehmen, das geschichtlich und systematisch in einem Maße etabliert ist wie die Mathematik, an seiner Peripherie wirklich noch affirmative oder gar parteiische Würdigungen? Wer sich anderen Feldern öffnen will, tut vielmehr gut daran, zuvor nicht ausgerechnet auf den Standards, Richtlinien und Vorbildern der eigenen (oder auch nur irgendeiner bestimmten) Disziplin zu bestehen. Weitaus mehr ließe sich in meinen Augen gewinnen, wenn man hier keine inhaltlichen, formalen oder stilistischen Vorgaben macht, wenn sich der heldenhafte Ernst der Forschung auch einmal frei im Unernstesten spiegeln darf, und nicht zuletzt: wenn dem gesunden Menschenverstand sowohl wie dem durch Zweifel angekränkelten der nötige Platz eingeräumt wird für skeptisches Fragen oder für Kritik, z. B. an verbreiteten schiefen Außenbildern der Mathematik, an Übertreibungen in ihrer Selbstwahrnehmung oder

Selbstdarstellung, an Fehleinschätzungen ihres Bildungspotenzials oder an ihrer erkenntnistheoretischen Reichweite, u. v. a. m.

Es steht durchaus in unserem Belieben, dergleichen paramathematisch zu nennen; ein neuer Zweig der Mathematik wird so daraus aber gewiss nicht.

Um einiges leichter als die vorangegangene Auslotung erscheint die schließlich noch verbliebene Aufgabe: den Ausdruck ›enttäuschte Erkenntnis‹ zu erklären. – Die altisländische Dichtung verwendete eine Vielzahl merkwürdiger Redefiguren mit feststehender Bedeutung, die sogenannten »Keningar«<sup>4</sup>, z. B. »Kampfdach« für den Schild, »Riff der Worte« für die Zähne, »hölzernes Pferd« für den Galgen. Nicht unähnlich wurde, in meiner persönlichen Nomenklatur, die ›enttäuschte Erkenntnis‹ irgendwann zum Synonym für Mathematik. Kaum bündiger, so will mir scheinen, könnten Stolz und Bescheidenheit dieser Wissenschaft in einer einzigen Wendung sich ausdrücken.

*Die enttäuschte Erkenntnis*

Warum Stolz? In ihrer mehr als zweitausendjährigen Geschichte hat die Mathematik in zahlreichen mühevollen Entwicklungsabschnitten und Etappen ihr heutiges Konzept von rein theoretischer, durch Beweise zu sichernder Erkenntnis herausgebildet und immer weiter verfeinert. Dazu musste sie Täuschungen der Sinne ausschalten, tiefsitzende Irrtümer auch der (vermeintlich reinen) Anschauung überwinden, versteckte (nicht immer ohne weiteres einleuchtende oder zulässige) Annahmen in ihren Aussagensystemen aufdecken – und letztlich (um 1900) sogar ihren Diskurs in einem radikalen Schritt von aller Erfahrungswirklichkeit ablösen. In diesem wörtlichen Sinn also darf sich die Mathematik stolz rühmen, ein nachhaltig ent-täushtes Erkenntnissystem zu bieten.

*Geschichte als Weg der Ent-täuschung*

*Purifikation und Abstraktion*

Das glänzende Ergebnis dieser Entwicklung hat freilich auch seinen Preis. Wird einer Theorie das gegenständliche Substrat entzogen und sie selbst auf die verbleibende logische Struktur reduziert, so scheint – zumindest auf den ersten Blick – fraglich zu werden, ob ihre Aussagenformen, die mit bedeutungslosen Zeichen den tatsächlichen, echten

*Theorien ohne Gegenstand?*

Aussagen nur nachgebildet sind, sich noch auf eine äußere dingliche Welt beziehen (lassen). Bestätigt sich hier womöglich der alte skeptische Einwand, dass ein Sachverhalt gerade dann, wenn die Mathematik ihn erst einmal präzise definiert und vollständig formalisiert hat, seinen realen Gehalt verloren und damit im Grunde aufgehört hat interessant zu sein? Das wäre dann wohl eine Enttäuschung im üblichen negativen Sinn. Sie bleibt vor allem denen nicht erspart, die zuviel erwartet haben.

Der Kern dieser Desillusionierung aber ist in Wahrheit eine Bescheidung, eine Beschränkung auf das, was mit formalen Mitteln grundsätzlich und tatsächlich erreichbar ist. Einstein hat diese veränderte Lage unübertroffen prägnant in Worte gefasst (in einem 1921 gehaltenen Festvortrag vor der Preussischen Akademie der Wissenschaften):

*Einsteins  
>Unschärferelation<*

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

»We are left with  
our symbols.«  
Hermann Weyl

Zwar wurde die ent-täuschte Mathematik auf abstrakte Begriffs- und Wissensformen zurückgeworfen; doch erforscht und entwickelt sie diese nicht allein um ihrer selbst willen, sondern ebenso als potenziell nutzbringende Werkzeuge für Naturforscher und sonstige Anwender. Dabei wird nicht mehr die einzelne mathematische Aussage auf Evidenz oder empirische Gültigkeit geprüft. Vielmehr sind es ganze Systeme, die einen bestimmten Wirklichkeitsausschnitt zutreffend oder – mit der von Einstein angemahnten Vorsicht gesagt – in hinlänglich guter Näherung beschreiben sollen. An die Stelle der alten (emphatisch verstandenen) *Theorie* ist nun das *Modell* als ein pragmatisches Erkenntnisinstrument getreten. Es kann mehr oder weniger gut funktionieren, es kann verbessert werden, und es kann (ohne gleich ganze Weltbilder in den Untergang zu reißen) auch einmal scheitern.

*Modellbildung:  
Mathematik als  
Technologie*

Ich kenne keine Wissenschaft, die so einfallsreich und produktiv mit ihren Enttäuschungen umzugehen weiß.

## Der Name der Algebra

*Sie hatten nicht wirklich  
eine Vorstellung von der Zukunft.*

Michel Houellebecq  
(Les Algébristes: La Poursuite du Bonheur)

In den Tagen, von denen die Geschichten aus *Tausendund-einer Nacht* erzählen, stellten die Abbassiden, ein Persien nahestehendes Geschlecht, die Kalifen und Herrscher der islamischen Gemeinschaft. Zum größten Teil waren diese – wie der ruhmreiche Hārūn ar-Rašīd<sup>5</sup> – Söhne von Sklavinnen nichtarabischer Herkunft und Fremdem gegenüber durchaus aufgeschlossen. Das gilt auch für Hārūns Sohn und Nachfolger al-Ma'mūn. Ein Freund der Wissenschaften, krönte dieser die vom Vater übernommene glanzvolle Tradition kultureller Förderung und gründete in Bagdad das legendäre *Haus der Weisheit*, eine Art international ausgerichteter Akademie mit Sternwarte und Bibliothek. Dorthin berief er aus vieler Herren Länder Gelehrte, die astronomische Tafeln zu berechnen hatten, Medizin betrieben oder mit anderen Naturwissenschaften befasst waren. Sprachkundige, häufig Christen und Juden aus Syrien, wurden damit beauftragt, die zahlreichen kostspieligen Buch-Erwerbungen ins Arabische zu übersetzen, darunter berühmte Werke des klassisch-griechischen Erbes (Euklid, Apollonios, Diophant, u. a. m.).

*Das Haus  
der Weisheit*

Ein hervorragendes Mitglied dieses Akademiestabs war der als Astronom bestellte Muḥammad ibn Mūsā (etwa 780 bis

850). Der Zusatz al-Ḥuwārizmī in seinem arabisierten Namen deutet darauf hin, dass er aus Choresmien stammte, einer ehemals kulturell hochentwickelten Region, die hundert Jahre zuvor von muslimischen Heeren erobert und niedergemacht worden war (heute ein in Usbekistan und Turkmenistan liegendes Gebiet). Aus dem Namenszusatz entwickelte sich – latinisierend verbogen – *Algorithmus* als Bezeichnung für ein (in gewissem Sinn mechanisches) effektives Rechenverfahren.

*Dixit Algorithmi* Den Verfahren zur Auflösung von Gleichungen ersten und zweiten Grades widmete Muḥammad ibn Mūsā ein laut Titel »kurzgefasstes Buch«, das hauptsächlich praktischen Zwecken wie Erbschaftsangelegenheiten, Handelsgeschäften oder der Landvermessung diene. Der Titel nennt ferner die Operationsarten: al-ğabr und al-muqābalah. Die erste Bezeichnung gab der Algebra ihren Namen (ganz unabhängig von der Frage, ob nicht Werke mit ähnlichem Titel und Inhalt Priorität beanspruchen dürfen). Spätestens zu Beginn des 13. Jahrhunderts war das auch in Europa angekommen und bekannt, etwa durch den *Liber abaci* des Leonardo von Pisa alias Fibonacci.

*Vergebliche Suche  
nach einem arabischen  
Gelehrten  
namens Geber*

Nichtsdestoweniger und seltsamerweise herrschte noch längere Zeit Verwirrung über den Ursprung des Wortes Algebra. Wohl durch den Florentiner Rafaele Canacci, Autor eines *Ragionamento di algebra*, kam die Hypothese auf, es müsse von einem arabischen Gelehrten namens Ğābir (lat. Geber) herühren. Der hier gemeinte Astronom Ğābir ibn Aflah aus Sevilla hat allerdings kein Buch über Algebra verfasst und lebte zudem viel später als al-Ḥuwārizmī. Auch andere ›Geber‹ kommen nicht in Betracht: weder Ğābir ibn Ḥayyān, Hofchemiker des Hārūn ar-Rašīd, noch der erst 850 geborene Astronom und Mathematiker Muḥammad ibn Ğābir al-Battānī. Den Vogel schoss ein gewisser Andreas Helmreich ab, öffentlicher Notar und Verfasser eines Rechenbuchs (1595). Darin identifiziert er den gesuchten Namensträger wie folgt: »Algebras zu Vlem, der große Geometer in Egypten, zur Zeit des Alexandri Magni, der da war ein Praeceptor oder Vorfah-



rer Euclidis, des Fürsten zu Megarien, ... hat auch gründlich Ding von den Zahlen mit Fleiß gesetzt, und das Buch in arabischer Sprach genannt *Gebra* und *Almchabula* ... geschrieben.«

Werfen wir einen Blick auf das geschwisterliche Wortpaar! Ohne die Vorsilbe  $\text{ğabr}$  – der bestimmte arabische Artikel – erhält man  $\text{ğabr}$  in der Bedeutung: Einrenken (von Knochen), Erzwingen bzw. Wiederherstellen eines Normalzustands, sowie  $\text{muqābalah}$  in der Bedeutung: Zusammenreffen, vergleichendes Gegenüberstellen. Bei Fibonacci, dem Arabisch-Kenntnisse unterstellt werden dürfen, wurde daraus lateinisch durchaus treffend: *restauratio* und *oppositio*. Im Lauf der Jahrhunderte erweiterte sich die Bedeutung des ersten Operationsbegriffs, der unter der Bezeichnung *algebra* als einziger von beiden überlebte und dann u. a. auch die  $\text{muqābalah}$  mit umfasste, den ohnehin wesentlicheren Teil der Umformungen beim Gleichungslösen.

*Wiederherstellen  
durch Einrenken*

Anfänglich hatten  $\text{ğabr}$  und  $\text{muqābalah}$  freilich eine ganz spezielle Bedeutung. Der  $\text{ğabr}$  ist streng genommen bedingt durch eine mathematische Schwäche: den nicht oder nur unzulänglich ausgebildeten Begriff der negativen Zahl. So bemerkt H. M. Enzensberger in *Creditur*: »Die Null zu erfinden war kein Zuckerschlecken. Als dann auch noch irgendein Inder auf die Idee kam, etwas könne weniger sein als nichts, streikten die Griechen« (*Die Geschichte der Wolken*, 2003). Jedenfalls sorgten die muslimischen Gelehrten durch Termumstellungen dafür, dass sämtliche Koeffizienten einer Gleichung positiv wurden: »Die Seite, die ein Minusglied enthält, / Ergänzt' und setze ein demselben gleiches / Bejahend auf die andre, o Gelehrter« – so brachte es ein persischer Verfasser auf den Punkt (zitiert nach G. H. F. Nesselmanns Übertragung<sup>6</sup>). Genau *das* ist  $\text{al-ğabr}$ , und »gerade das, was dieses arabische Wort bezeichnet, ist uns fremde geworden«, resümiert Nesselmann das Thema leicht irritiert. – Ganz anders die sich daran anschließende  $\text{muqābalah}$ . Sie besteht darin, passende Terme zusammenzufassen und die Gleichung auf Normalform zu bringen. Bei Gleichungen höchstens zwei-

*Horror negativi*