Kapitel 1: Einführung

1.1 Überblick Optimierung und Operations-Research

„Operations Research“ meint die Anwendung von mathematischen Optimierungsverfahren auf Problemstellungen in der Wirtschaftswissenschaft und im Planungsbereich (z.B. Transportprobleme, Tourenplanung, Mischungsprobleme, Verschnitt-Probleme usw…).

Dazu benötigt man also quantitative mathematische Optimierungsmodelle. Eines dieser zahlreichen Optimierungsmodelle ist die LINEARE OPTIMIERUNG.

Bei mathematischen Optimierungsmodellen geht es im wesentlichen um das Bestimmen eines Maximums oder Minimums einer Funktion (gegebenenfalls noch zusätzliche Bedingungen).

Zunächst ein Überblick über „Mathematische Optimierungsprobleme“ und die Einordnung von LOP in dieses Überblick-Schema:

A.) INFINITE Optimierung (unendlich viele Variable, also eine Funktion x(t), ist gesucht)

Beispiele: Variationsrechnung,

„optimal control"

<u>B.) FINITE Optimierung</u> (endlich viele Variable)

$x=(x_1, x_2, \ldots x_n)^T$, n ist natürliche Zahl

I. Diskrete Optimierung (Variable können auch ganzzahlig sein) Beispiele. Ganzzahlige Optimierung, Diophantische Gleichungen, Graphentheorie, Dynamische Optimierung

II. <u>Stetige Optimierung</u>

Die Variablen sind reell

Man unterscheidet

Nichtlineare Optimierung (mindestens eine der auftretenden Funktionen ist nicht linear)

<u>Lineare Optimierung (LOP)</u> (alle auftretenden Funktionen sind (affin-) linear

Einsatz-Spektrum von Operations Research (OR):

Betriebswirtschaft, Volkswirtschaft, Planungsprobleme, wie Daten- und Kommunikationsnetze, Verkehrs-Netze, Maschinenbau, Elektrotechnik, usw…

Beim OR hat man es zu tun mit

- Konstruktion von Modellen

- Analyse von Zusammenhängen

- Berechnung der „optimalen Entscheidungen“

Schwierigkeiten gibt es durch die

- Komplexität der Wirklichkeit

- Finden eines geeigneten Modelles

- Erhebung der Daten

- Ungewissheit der Daten

Vorgehensweise beim OR

a.) Gründliche Analyse des Problems

b.) Genaue Formulierung eines mathematischen Modelles („Modellbildung“)

c.) „Realisierung“ des Modelles durch Algorithmen und Computerprogramm

d.) Verifizierung durch „Erfahrung“

Wichtige Optimierungsmethoden sind Graphentheorie, dynamische Optimierung und die hier behandelte Lineare Optimierung.

1.2.Mathematische Optimierungsmodelle

Zwei Hauptaufgaben gibt es bei Optimierungsproblemen:

(i) MODELLIEREN einer realen Situation mittels eines „Extremwertproblems“

(ii) Lösung dieses Extremwertproblems mittels geeigneter Algorithmen

KLASSIFIKATION finiter Optimierungsprobleme

„finit“ heißt: endliche viele Variable, also x aus R^n

Allgemeine Problemstellung: Suche das Minimum (der Maximum) einer Funktion unter einer Anzahl Neben-Bedingungen.

Spezialfälle:

0.) Freie Optimierung: keinerlei Nebenbedingung

1.) Lineare Optimierung: alle auftretenden Funktionen sind (affin-) linear

2.) Konvexe Optimierung: Auftretende Funktionen sind konvex (oder linear)

3.) Quadratische Optimierung: Eine quadratische Zielfunktion wird unter linearen Nebenbedingungen minimiert

4.) Ganzzahlige Optimierung: Die Lösungsvariablen sind ganze Zahlen (oder sogar binär)

5.) Stochastische Optimierung: Einige Parameter sind Zufallsvariable (mit bekannter Verteilung). Der Erwartungswert der Zielfunktion wird optimiert.

Kapitel 2: Lineare Optimierung

2.1. Anwendungsbeispiele

Die folgende Sammlung von Anwendungsbeispielen stammt größtenteils vom Autor.

Beispiel 2.1:

Orangensaft und Orangenmarmelade

Aus gegebenen Vorräten an Orangen und Zucker soll Orangensaft und Orangenmarmelade hergestellt werden. Details siehe kondensiert in folgender Tabelle:

Orangensaft und Orangenmarmelade

	je Flasche Orangensaft	Glas Orangenmarmelade	Vorräte
Orangen [kg]	2	1	200
Zucker	0.2	1	110
Gewinn (€)	0.20	0.25	-

Welche Anzahlen x_1 Flaschen Orangensaft und x_2 Gläser Orangenmarmelade muss man herstellen, damit der Gesamtgewinn maximal wird und die Vorräte höchstens verbraucht werden?